Primera exposición de Análisis Real 2

Alex Junior Gomez Saltachin

21 de septiembre de 2012

Teorema:
Sea una función $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to [0;+\infty]$. No existe μ con las siguientes propiedades:

1. $\mu([0;1]) = 1$.
2. $\mu(A) = \mu(A + r)$; $\forall A \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$ y $\forall r \in \mathbb{R}$.
3. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$; $\forall A,B \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$.
4. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos y $\mu(A_n) = 0$ para todo n entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Demostración:

Sea $I :=$ [-1;1]. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en I de la siguiente forma:

Dados $x, y \in I$,

$$x \sim y := x - y \in \mathbb{Q}.$$

Sea $\{[x]_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ la familia de clases de equivalencia en I. Por el axioma de elección puedo tomar un representante a_λ de cada clase $[x]_\lambda$ y formar el siguiente conjunto:

$$\text{A}:=\{a_\lambda \in [x]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

Sea $I_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de los racionales en I. Debido a que este es numerable puedo generar una enumeración $r_1, r_2, r_3...$ tal que $r_n \in I_{\mathbb{Q}}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ahora definimos,

$$A + r_n := \{\ a + r_n : a \in A, r_n \in I_{\mathbb{Q}}\}$$

con ello afirmamos que:

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n \subset [-2; 2]$$

Primero demostraremos la inclusión de la izquierda.

Sea z arbitrario de I y $[z]$ su clase de equivalencia. Entonces $[z] = [a]$ para algún $a \in A$. Se sigue que $z = a + r_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, ya que $[a] = \{a + r_n : r_n \in I_{\mathbb{Q}}\}$.

La inclusión de la derecha proviene de que tanto como $a \in A$ y $r_n \in I_{\mathbb{Q}}$ son elementos de I, por lo tanto $a + r_n \in [-2; 2]$. Con ello que demostrado ambas inclusiones.

Se tiene que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n \subset [-2; 2]$ entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n) \leq \mu([-2; 2]) = 4$. Esto implica que $0 \leq \mu(A) < \infty$, ya que $\mu(A + r_n) = \mu(A)$.

Pero ahora afirmamos que $\mu(A + r_n)$=0. Para ello asumamos que este es mayor que 0 y definimos $\delta := \mu(A + r_n)$ y m:=$[|\frac{4}{\delta} + 1|]$.

Si tomamos $\bigcup_{n=1}^{m} A + r_n$ y le aplicamos μ obtenemos que $\mu(\bigcup_{n=1}^{m} A + r_n) > 4$, lo cual no puede ser debido a que $\bigcup_{n=1}^{m} A + r_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n$. Por lo tanto. δ=0

Como $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n$ entonces $\mu(I) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n)$. Se sigue que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n) \geq 2$, pero $\mu(A + r_n)$= 0 y como $\{A + r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos. Entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A + r_n) = 0$. Con esto llegamos a un absurdo y concluimos que tal μ no existe.